第27卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 5
2010年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0809-11

Rössler 混沌系统的函数投影同步*

罗润梓， 邓述程， 魏正民

(南昌大学数学系，南昌 330031)

摘 要: 混沌同步是非线性科学中的一个重要课题。目前大多数同步都是考虑参数已知的情形，然而在实际情况下，一些系统的参数是不能事先确定的，因此考虑参数未知系统的同步就很必要。本文讨论 Rössler 混沌系统的函数投影同步，分别考虑了参数已知和未知的两种情形，由线性系统的稳定性理论和 Lyapunov 稳定性理论给出了两个混沌系统渐近稳定的充分条件，并通过数值模拟说明所给方法的有效性。

关键词: 函数投影同步；Lyapunov 方法；Rössler 混沌系统

分类号: AMS(2000) 34C28 **中图分类号**: O193 **文献标识码**: A

1 引言

混沌是非线性确定性系统的一种内在随机现象，是一种特殊的非线性动力学行为。混沌系统的最大特点就在于系统的演化对初始条件十分敏感，因此从长期意义上讲系统的行为是不可预测的。正是由于混沌系统对初始条件的极其敏感性，过去人们认为混沌同步是非常困难的。然而在 1990 年美国海军实验室的 Pecora 和 Carrol[1] 提出混沌自同步方法，首次利用驱动-响应法实现了两个混沌系统的同步，从而拉开了混沌同步方法研究与应用的序幕。近 20 年来，随着混沌同步研究不断深入人们发现它在保密通讯，信息科学，生物，医学，工程等领域有着广阔的应用前景，因而引起了广泛的重视。至今，人们已经提出了各种混沌控制与同步的方法，例如：驱动-响应同步[1]、线性与非线性反馈同步[2,3]、耦合同步[4]、脉冲同步[5-7]、自适应同步[8,9] 等。最初大多数混沌同步都是考虑完全同步 (complete synchronization)，后来人们把完全同步推广到一般的情形：广义投影同步 (generalized projective synchronization)[10-13]。在文献 [13] 中把广义投影同步进一步推广到修正投影同步 (modified projective synchronization)，最近 Chen 等[14] 引入了更一般的同步概念：函数投影同步 (function projective synchronization)。所谓函数投影同步是指时间趋于无穷时驱动 (主动) 系统与响应 (被动) 系统的状态变量满足下面的方程

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty}\left\|x_{1s}-f_1(x_{1m},x_{2m},\cdots,x_{nm})x_{1m}\right\|=0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\left\|x_{2s}-f_2(x_{1m},x_{2m},\cdots,x_{nm})x_{2m}\right\|=0,\\ \qquad\cdots\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\left\|x_{ns}-f_n(x_{1m},x_{2m},\cdots,x_{nm})x_{nm}\right\|=0,\end{cases}$$

其中下标 m 表示驱动系统而 s 表示响应系统，$f_i(x)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$ 是同步函数。易知完全同步，广义投影同步，修正投影同步都是函数投影同步的特例。

收稿日期: 2008-12-31. **作者简介**: 罗润梓 (1966年12月生)，男，博士，副教授. 研究方向：排序理论与应用，混沌控制与同步，复杂网络.

*基金项目: 江西省自然科学基金 (2007GZS2126).

罗[15] 考虑了参数未知时 Rössler 超混沌系统的函数同步问题，采用自适应同步法给出了该系统函数同步的充分条件，并以数值模拟验证了所给方法的有效性。Rössler 混沌系统是一个经典的混沌系统，本文用不同的方法分别考虑了参数已知和未知时该系统的函数投影同步问题，给出了同步的充分条件，并通过数值模拟以说明所给方法的有效性。

本文是这样安排的：在第 2, 3 节分别给出了参数已知和未知的两种情形下同步的充分条件。第 4 节是数值模拟，最后是结论。

2 已知系统参数的函数投影同步

Rössler[16] 系统是一个经典的混沌系统，它可由下面的三维常微分方程来描述

$$\begin{cases} \dot{x}_m = -y_m - z_m, \\ \dot{y}_m = x_m + a y_m, \\ \dot{z}_m = b + z_m(x_m - c), \end{cases} \tag{1}$$

这里的下标 m 表示这个系统是驱动系统，a, b, c 为常数，当 $a = b = 0.2$, $c = 5.7$ 时该系统是混沌的。在本节中我们假设 a, b, c 都是已知的。下面先考虑两个相同 Rössler 系统的函数投影同步，然后考虑 Rössler 系统和 Lorenz 系统的函数投影同步。

2.1 两个相同 Rössler 系统的函数投影同步

设相应的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_s = -y_s - z_s + u_1, \\ \dot{y}_s = x_s + a y_s + u_2, \\ \dot{z}_s = b + z_s(x_s - c) + u_3, \end{cases} \tag{2}$$

这里的 u_1, u_2, u_3 为控制器，下标 s 表示这个系统是响应系统。本小节的目的是构造合适的控制器 u_1, u_2, u_3 使得系统 (1) 与 (2) 函数投影同步，即

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \|x_s - f_1(x_m)x_m\| = 0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \|y_s - f_2(y_m)y_m\| = 0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \|z_s - f_3(z_m)z_m\| = 0. \end{cases}$$

在本节中我们假定 $f_i(x) = \alpha_{i1}x + \alpha_{i2}$，这里的 α_{i1}, α_{i2} 为常数且 $\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 \neq 0$, $i = 1, 2, 3$。

定义误差变量为

$$e_1 = x_s - (\alpha_{11}x_m + \alpha_{12})x_m, \quad e_2 = y_s - (\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m, \quad e_3 = z_s - (\alpha_{31}z_m + \alpha_{32})z_m,$$

则由 (2) 减去 (1) 可得误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = k_1e_1 - e_2 - e_3 - \alpha_{21}y_m^2 + (\alpha_{12} - \alpha_{22})y_m + (\alpha_{12} - \alpha_{32})z_m \\ \qquad - \alpha_{31}z_m^2 + 2\alpha_{11}x_my_m + 2\alpha_{11}x_mz_m - k_1e_1 + u_1, \\ \dot{e}_2 = e_1 + (a - k_2)e_2 + \alpha_{11}x_m^2 + (\alpha_{12} - \alpha_{22})x_m - a\alpha_{21}y_m^2 \\ \qquad - 2\alpha_{11}x_my_m + k_2e_2 + u_2, \\ \dot{e}_3 = e_1 + (k_3 - c)e_3 + (1 - \alpha_{32})b + x_sz_s - 2b\alpha_{31}z_m - 2\alpha_{31}x_mz_m^2 \\ \qquad - \alpha_{32}x_mz_m + c\alpha_{31}z_m^2 - e_1 - k_3e_3 + u_3, \end{cases} \tag{3}$$

这里的 k_1, k_2, k_3 为实数。

下面先给出两个引理，然后给出本小节的主要定理。

引理1　设 A 为 n 阶实方阵，若对任意实 n 维列向量 $\alpha \neq 0$ 都有 $\alpha^T A\alpha < 0$，则 A 的特征根的实部都小于0。

引理2　若 $k_1 < 0$, $a - k_2 < 0$, $k_3 - c < 0$，则矩阵

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & -1 & -1 \\ 1 & a-k_2 & 0 \\ 1 & 0 & k_3-c \end{pmatrix}$$

的特征根实部都小于0。

证明　由引理1只须证明对任意的非零列向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$ 都有 $\alpha^T A\alpha < 0$ 即可。由于

$$\alpha^T A\alpha = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} k_1 & -1 & -1 \\ 1 & a-k_2 & 0 \\ 1 & 0 & k_3-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1x_1^2 + (a-k_2)x_2^2 + (k_3-c)x_3^2 < 0,$$

根据引理1知矩阵 A 的特征根的实部都小于0。

下面的定理1给出了系统(1)与(2)函数投影同步的充分条件。

定理1　设

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_{21}y_m^2 + (\alpha_{22} - \alpha_{12})y_m + (\alpha_{32} - \alpha_{12})z_m + \alpha_{31}z_m^2 - 2\alpha_{11}x_my_m - 2\alpha_{11}x_mz_m + k_1e_1, \\
u_2 &= -\alpha_{11}x_m^2 + (\alpha_{22} - \alpha_{12})x_m + a\alpha_{21}y_m^2 + 2\alpha_{11}x_my_m - k_2e_2, \\
u_3 &= (\alpha_{32} - 1)b - x_sz_s + 2b\alpha_{31}z_m + 2\alpha_{31}x_mz_m^2 + \alpha_{32}x_mz_m - c\alpha_{31}z_m^2 + e_1 + k_3e_3,
\end{aligned}$$

则当 $k_1 < 0$, $a - k_2 < 0$, $k_3 - c < 0$ 时，系统(1)与(2)函数投影同步。

证明　令 $e = (e_1, e_2, e_3)^T$，把 u_1, u_2, u_3 分别代入系统(3)可得 $\dot{e} = Ae$。当 $k_1 < 0$, $a - k_2 < 0$, $k_3 - c < 0$ 时由引理2知矩阵 A 的特征根的实部都小于0。根据Lyapunov稳定性理论知 $\lim\limits_{t\to+\infty} e = 0$，从而系统(1)与(2)函数投影同步。

2.2　Rössler 系统和 Lorenz 系统的函数投影同步

Lorenz 系统也是一个经典的混沌系统，它可由下面的微分方程表示

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(y - x), \\ \dot{y} = rx - xz - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

其中 δ, r, b 为参数且当 $\delta = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$ 时 Lorenz 系统是混沌的。设 Rössler 系统(1)为驱动系统，Lorenz 系统为响应系统，则受控的响应系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \delta(y_s - x_s) + u_1, \\ \dot{y}_s = rx_s - x_sz_s - y_s + u_2, \\ \dot{z}_s = x_sy_s - bz_s + u_3, \end{cases} \tag{4}$$

这里的 u_1, u_2, u_3 为控制器，下标 s 表示这个系统是响应系统。本小节的目的是构造合适的控制器 u_1, u_2, u_3 使得系统 (1) 与 (4) 函数投影同步。

定义误差变量为

$$e_1 = x_s - (\alpha_{11}x_m + \alpha_{12})x_m, \quad e_2 = y_s - (\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m, \quad e_3 = z_s - (\alpha_{31}z_m + \alpha_{32})z_m,$$

则由 (4) 减去 (1) 可得误差系统为

$$\left\{\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (k_1 - \delta)e_1 + \delta e_2 + \delta(\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m - \delta(\alpha_{11}x_m + \alpha_{12})x_m \\ &\quad + (2\alpha_{11}x_m + \alpha_{12}) \times (y_m + z_m) - k_1e_1 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= re_1 + (k_2 - 1)e_2 - x_se_3 + r(\alpha_{11}x_m + \alpha_{12})x_m - x_s(\alpha_{31}z_m + \alpha_{32})z_m \\ &\quad - (\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m - (2\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})(x_m + ay_m) - k_2e_2 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= x_se_2 + (k_3 - b)e_3 + x_s(\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m - b(\alpha_{31}z_m + \alpha_{32})z_m \\ &\quad - (2\alpha_{31}z_m + \alpha_{32}) \times (b + z_m(x_m - c)) - k_3e_3 + u_3, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为实数。

由于下面要用到三阶线性时变系统稳定性理论，因此我们先对其作简单介绍。考虑如下形式的三阶线性时变系统

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

这里假设其系数 $a_{ij}(t)$ 都连续有界，且设 $a_{ii}(t) \leq -a < 0\,(i = 1,2,3)$，对任意的 $t \geq t_0$。令

$$b_{11} = \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \big\{a_{11}(t) + |a_{21}(t)|,\, |a_{12}(t)| + a_{22}(t)\big\},$$

$$b_{12} = \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \big\{|a_{13}(t)| + |a_{23}(t)|\big\},$$

$$b_{21} = \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \big\{|a_{31}(t)|,\, |a_{32}(t)|\big\}, \quad b_{22} = \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \big\{a_{33}(t)\big\},$$

可得辅助方程

$$\left\{\begin{aligned} \dot{v}_1 &= b_{11}(t)v_1 + b_{12}(t)v_2, \\ \dot{v}_2 &= b_{21}(t)v_1 + b_{22}(t)v_2. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

引理 3[17] 如果三阶线性时变系统 (6) 的系数连续有界，$a_{ii}(t) \leq -a < 0\,(i = 1,2,3)$，对任意的 $t \geq t_0$，且它的辅助方程 (7) 的系数满足如下两条：

1) 对角元素为负； 2) 所有的特征根都有负实部；

则三阶线性时变系统 (6) 的零解是渐近稳定的。

定理2 若

$$u_1 = k_1e_1 - \delta(\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m + \delta(\alpha_{11}x_m + \alpha_{12})x_m - (2\alpha_{11}x_m + \alpha_{12})(y_m + z_m),$$

$$u_2 = k_2e_2 - r(\alpha_{11}x_m + \alpha_{12})x_m + x_s(\alpha_{31}z_m + \alpha_{32})z_m + (\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m + (2\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})(x_m + ay_m),$$

$$u_3 = k_3e_3 - x_s(\alpha_{21}y_m + \alpha_{22})y_m + b(\alpha_{31}z_m + \alpha_{32})z_m + (2\alpha_{31}z_m + \alpha_{32})(b + z_m(x_m - c)),$$

则当 $k_1 - \delta + |r| < 0,\ |\delta| + k_2 - 1 < 0,\ k_3 - b < 0$ 且

$$\sup_{t_0 \le t < +\infty} \{k_1 - \delta + |r|, |\delta| + k_2 - 1\}(k_3 - b) > x_s^2$$

时系统 (1) 与系统 (4) 函数投影同步。

证明 把 u_1, u_2, u_3 代入误差系统 (5) 中可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (k_1 - \delta)e_1 + \delta e_2, \\ \dot{e}_2 = re_1 + (k_2 - 1)e_2 - x_se_3, \\ \dot{e}_3 = x_se_2 + (k_3 - b)e_3. \end{cases} \tag{8}$$

其辅助系统的系数为

$$b_{11} = \sup_{t_0 \le t < +\infty} \{k_1 - \delta + |r|, |\delta| + k_2 - 1\}, \quad b_{12} = b_{21} = |x_s|, \quad b_{22} = k_3 - b.$$

易知当 $k_1 - \delta + |r| < 0,\ |\delta| + k_2 - 1 < 0,\ k_3 - b < 0$ 且

$$\sup_{t_0 \le t < +\infty} \{k_1 - \delta + |r|, |\delta| + k_2 - 1\}(k_3 - b) > x_s^2$$

时系统 (6) 的辅助系统系数满足引理3的两个条件，因此由引理3知系统 (8) 的零解是渐近稳定的，从而系统 (1) 与系统 (4) 函数投影同步。

注 虽然 x_s^2 是时变的，但却是有界的。我们可以利用数值模拟求出 $|x_s|$ 的近似最大值，因此总可以取到恰当的实数 k_1, k_2, k_3 使得定理3的条件满足。事实上不事先求出 $|x_s|$ 的近似最大值也是可以的，只需取 k_1, k_2, k_3 为负数且足够小即可。

3 系统参数未知的函数投影同步

本节继续讨论 Rössler 混沌系统的函数投影同步，并假定其参数 a, b, c 是未知的。设系统 (1) 为驱动系统，则相应的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_s = -y_s - z_s + u_1, \\ \dot{y}_s = x_s + a_1y_s + u_2, \\ \dot{z}_s = b_1 + z_s(x_s - c_1) + u_3, \end{cases} \tag{9}$$

这里的 u_1, u_2, u_3 为控制器，下标 s 表示这个系统是响应系统。本节的目的是构造合适的控制器 u_1, u_2, u_3 及参数更新法则 $\dot{a}_1, \dot{b}_1, \dot{c}_1$ 使得系统 (1) 与 (9) 函数投影同步。

假设同步函数为

$$f_1(x_m)=\alpha_{11}x_m^2+\alpha_{12}x_m+\alpha_{13},\quad f_2(y_m)=\alpha_{21}y_m^2+\alpha_{22}y_m+\alpha_{23},$$
$$f_3(z_m)=\alpha_{31}z_m^2+\alpha_{32}z_m+\alpha_{33},$$

因此 (1) 与 (9) 函数投影同步即意味着下面的等式成立

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|x_s-(\alpha_{11}x_m^2+\alpha_{12}x_m+\alpha_{13})x_m\right\|=0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\left\|y_s-(\alpha_{21}y_m^2+\alpha_{22}y_m+\alpha_{23})y_m\right\|=0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\left\|z_s-(\alpha_{31}z_m^2+\alpha_{32}z_m+\alpha_{33})z_m\right\|=0,\end{cases}$$

这里的 α_{i1}, α_{i2}, α_{i3} 为常数且 $\alpha_{i1}^2+\alpha_{i2}^2+\alpha_{i3}^2\neq 0$, $i=1,2,3$。

定义误差变量为

$$e_1=x_s-(\alpha_{11}x_m^2+\alpha_{12}x_m+\alpha_{13})x_m,\quad e_2=y_s-(\alpha_{21}y_m^2+\alpha_{22}y_m+\alpha_{23})y_m,$$
$$e_3=z_s-(\alpha_{31}z_m^2+\alpha_{32}z_m+\alpha_{33})z_m,$$

则可得

$$\begin{aligned}\dot{e_1}&=\dot{x}_s-(3\alpha_{11}x_m^2+2\alpha_{12}x_m+\alpha_{13})\dot{x}_m\\&=-y_s-z_s+u_1-(3\alpha_{11}x_m^2+2\alpha_{12}x_m+\alpha_{13})(-y_m-z_m),\\ \dot{e_2}&=\dot{y}_s-(3\alpha_{21}y_m^2+2\alpha_{22}y_m+\alpha_{23})\dot{y}_m\\&=x_s+a_1y_s+u_2-(3\alpha_{21}y_m^2+2\alpha_{22}y_m+\alpha_{23})(x_m+ay_m),\\ \dot{e_3}&=\dot{z}_s-(3\alpha_{31}z_m^2+2\alpha_{32}z_m+\alpha_{33})\dot{z}_m\\&=b_1+z_s(x_s-c_1)+u_3-(3\alpha_{31}z_m^2+2\alpha_{32}z_m+\alpha_{33})(b+z_m(x_m-c)).\end{aligned}$$

下面的定理3保证了系统 (1) 与系统 (9) 能够实现函数投影同步。

定理3　令

$$\begin{aligned}&u_1=y_s+z_s-(3\alpha_{11}x_m^2+2\alpha_{12}x_m+\alpha_{13})(y_m+z_m)-k_1e_1,\\&u_2=-x_s-a_1y_s+(3\alpha_{21}y_m^2+2\alpha_{22}y_m+\alpha_{23})(x_m+a_1y_m)-k_2e_2,\\&u_3=-b_1-z_s(x_s-c_1)+(3\alpha_{31}z_m^2+2\alpha_{32}z_m+\alpha_{33})(b_1+z_m(x_m-c_1))-k_3e_3,\\&\dot{a_1}=-(3\alpha_{21}y_m^2+2\alpha_{22}y_m+\alpha_{23})y_me_2,\quad \dot{b_1}=-(3\alpha_{31}z_m^2+2\alpha_{32}z_m+\alpha_{33})e_3,\\&\dot{c_1}=(3\alpha_{31}z_m^2+2\alpha_{32}z_m+\alpha_{33})z_me_3,\end{aligned}$$

则系统 (1) 与系统 (9) 函数投影同步，这里的 $k_i>0$, $i=1,2,3$。

证明　令 $e_a=a_1-a$, $e_b=b_1-b$, $e_c=c_1-c$。构造 Lyapunov 函数

$$V=\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_a^2+e_b^2+e_c^2),$$

其关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_a\dot{e}_a + e_b\dot{e}_b + e_c\dot{e}_c \\ &= \big[-y_s - z_s + u_1 + (3\alpha_{11}x_m^2 + 2\alpha_{12}x_m + \alpha_{13})(y_m + z_m)\big]e_1 \\ &\quad +\big[x_s + a_1y_s + u_2 - (3\alpha_{21}y_m^2 + 2\alpha_{22}y_m + \alpha_{23})(x_m + ay_m)\big]e_2 \\ &\quad +\big[b_1 + z_s(x_s - c_1) - (3\alpha_{31}z_m^2 + 2\alpha_{32}z_m + \alpha_{33})(b + z_m(x_m - c))\big]e_3 \\ &\quad +\dot{a}_1(a_1 - a) + \dot{b}_1(b_1 - b) + \dot{c}_1(c_1 - c).\end{aligned}$$

把 u_1, u_2, u_3, $\dot{a}_1$, $\dot{b}_1$, $\dot{c}_1$ 的值分别代入上式可得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1e_1^2 - k_2e_2^2 - k_3e_3^2.$$

由于 $k_i > 0,\ i = 1,2,3$，因此 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \le 0$。根据 Lyapunov 稳定理论可知 $\lim\limits_{t\to+\infty} e_i = 0,\ i = 1,2,3$，因此系统 (1) 与系统 (9) 函数投影同步。

4　数值模拟

为了验证本文所给定理的正确性，我们在本节对 Rössler 系统的函数投影同步进行数值模拟。在本节的所有数值模拟实验中，我们用 4 阶的 Runge-Kutta 方法解微分方程，步长均为 0.001。为了保证 Rössler 系统是混沌的，在下面的所有实验中我们令 $a = b = 0.2,\ c = 5.7$。

4.1　参数已知时的函数投影同步

模拟 1　为了简便起见，我们假设 $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{32} = 1,\ \alpha_{22} = \alpha_{31} = -1$。取 $k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 0$，则由定理 1 知系统 (1) 与 (2) 函数投影同步。任意选取初始点 $x_m(0) = 1,\ y_m(0) = 2,\ z_m(0) = 3,\ x_s(0) = 4,\ y_s(0) = 5,\ z_s(0) = 6$，其混沌系统同步状态图与同步误差图见图 1，图 2。从图 2 可知两系统快速地实现函数投影同步。

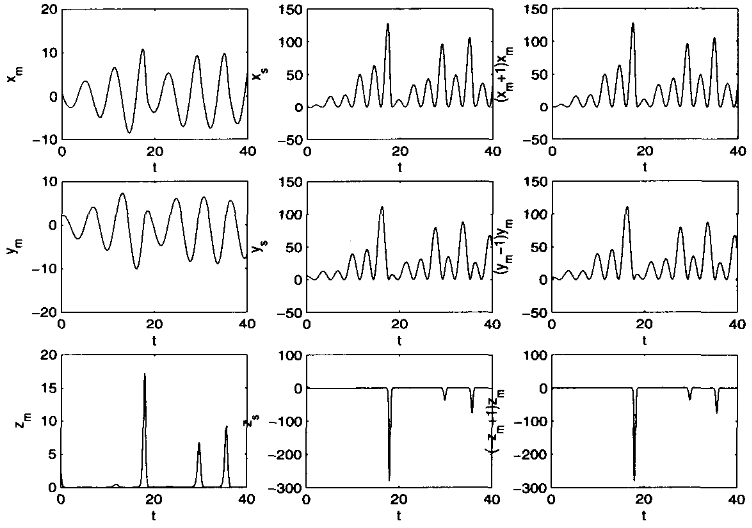

图 1:　$f_1(x_m) = x_m + 1,\ f_2(y_m) = y_m - 1,\ f_3(z_m) = -z_m + 1$ 时的同步状态图

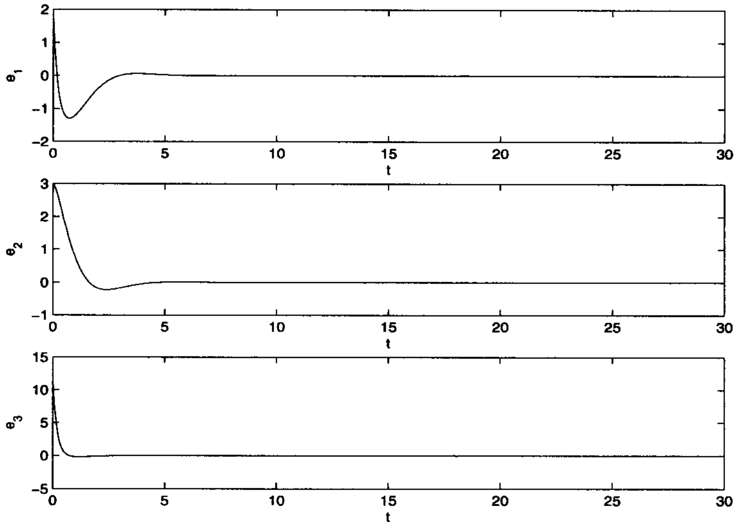

图 2: $f_1(x_m) = x_m + 1$, $f_2(y_m) = y_m - 1$, $f_3(z_m) = -z_m + 1$ 时的同步误差图

模拟2 不妨设 $\delta = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$，此时Lorenz系统是混沌的。不失一般性，我们假定同步函数为 $f_1(x) = -x + 1$, $f_2(x) = -1$, $f_3(x) = x$。由数值模拟易知 $\max |x_s| = 100$。如果我们取 $k_1 = k_2 = k_3 = -120$，则由定理2知系统(1)与(4)函数同步。任意选取初始点 $x_m(0) = 1$, $y_m(0) = 2$, $z_m(0) = 3$, $x_s(0) = 4$, $y_s(0) = 5$, $z_s(0) = 6$，其混沌系统同步状态图与同步误差图见图3，图4。从图4可知两系统快速地实现函数投影同步。

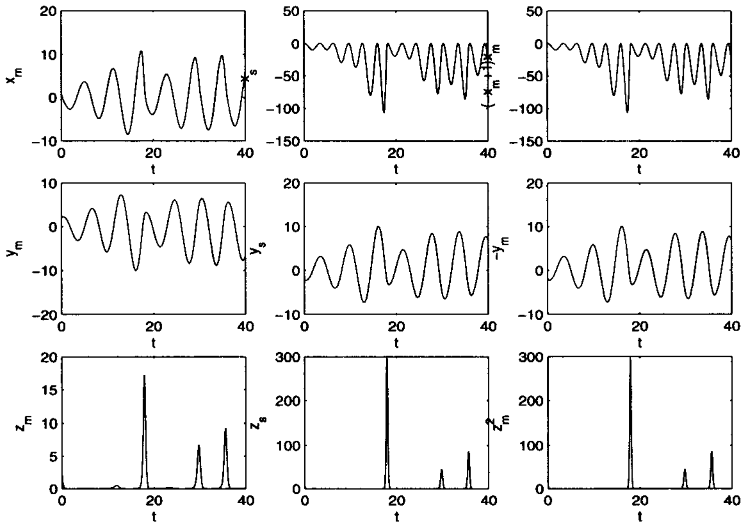

图 3: $f_1(x_m) = -x_m + 1$, $f_2(y_m) = -1$, $f_3(z_m) = z_m$ 时的同步状态图

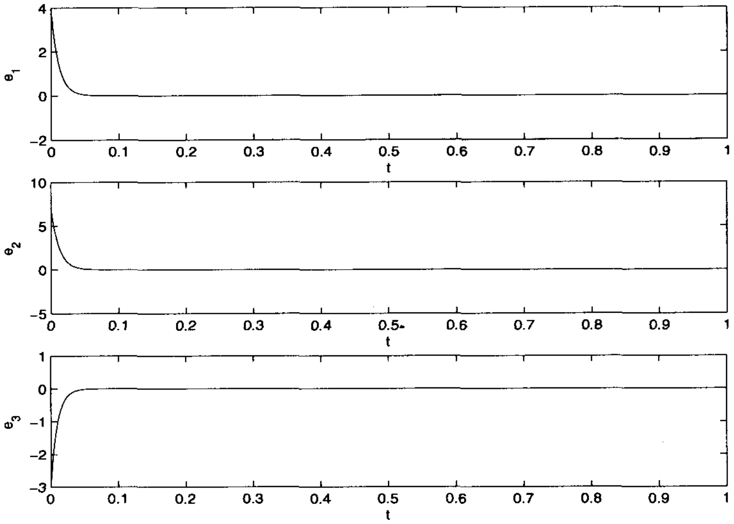

图 4:　$f_1(x_m) = -x_m + 1$, $f_2(y_m) = -1$, $f_3(z_m) = z_m$ 时的同步误差图

4.2　参数未知时的函数投影同步

为了简便起见，我们令同步函数分别为 $f_1(x_m) = x_m^2$，$f_2(y_m) = y_m$，$f_3(z_m) = 1$ 并且选取 $k_i = 1$，$i = 1,2,3$。由定理3知此时混沌系统(1)与(9)函数投影同步。任意选取初始点 $x_m(0) = 1$，$y_m(0) = 2$，$z_m(0) = 3$，$x_s(0) = 4$，$y_s(0) = 5$，$z_s(0) = 6$，$a_1(0) = 0$，$b_1(0) = 0$，$c_1(0) = 0$，其混沌系统同步状态图与同步误差图见图5，图6，图7。从图6可知两系统快速地实现函数投影同步，图7则表明 a_1, b_1, c_1 分别趋于期望值0.2, 0.2, 5.7。

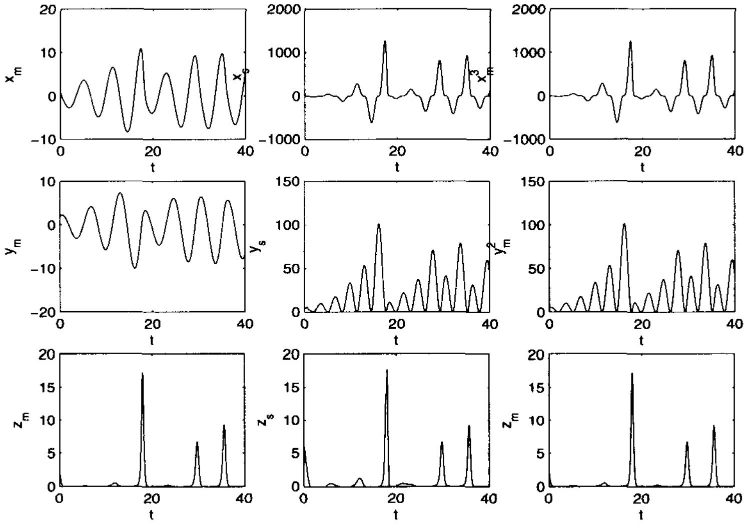

图 5:　$f_1(x_m) = x_m^2$，$f_2(y_m) = y_m$，$f_3(z_m) = 1$ 时的同步状态图

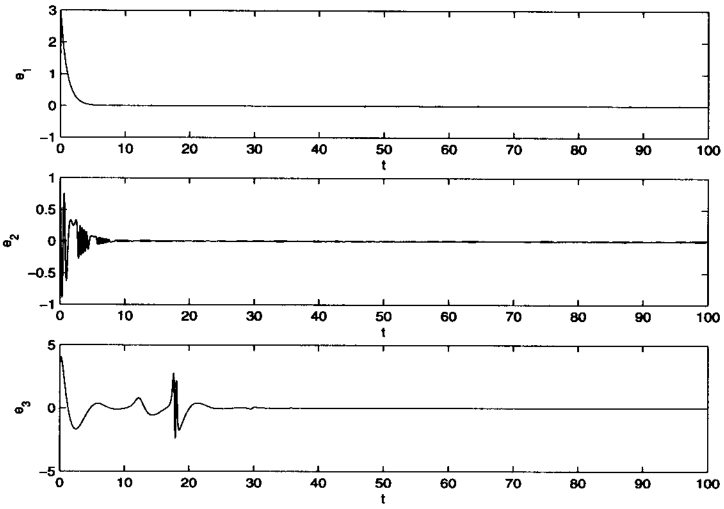

图 6: $f_1(x_m) = x_m^2$, $f_2(y_m) = y_m$, $f_3(z_m) = 1$ 时的同步误差图

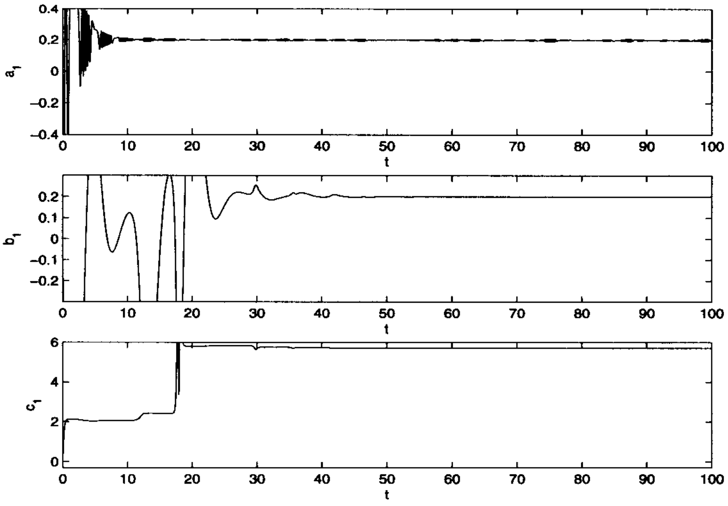

图 7: 同步参数 a_1, b_1, c_1 的演化图

5 结论

本文主要讨论 Rössler 系统的函数投影同步，分别就参数已知和未知的两种情形给出了同步的充分条件，并通过数值模拟以说明所给方法的有效性。在参数未知时所给方法不仅可以实现两个系统的同步，而且还可以依此求出未知参数。

参考文献:

[1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64: 821-824

[2] Huang L L, Feng R P, Wang M. Synchronization of chaotic systems via nonlinear control[J]. Physics Letters A, 2004, 320: 271-275
[3] Lü J H, Lu J A. Controlling uncertain Lü system using linear feedback[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2003, 17: 127-133
[4] Lü J H, Zhou T S, Zhang S C. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2002, 14: 529-541
[5] 罗润梓. 一个新混沌系统的脉冲控制与同步[J]. 物理学报，2007, 56: 5655-5660
Luo R Z. Impulsive control and synchronization of a new chaotic system[J]. Journal of Physics, 2007, 56: 5655-5660
[6] Sun J T, Zhang Y P. Impulsive control and synchronization of Chua's oscillators[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2004, 66: 499-508
[7] Sun J T. Impulsive control of a new chaotic system[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2004, 64: 669-677
[8] Park J H. Adaptive synchronization of a unified chaotic systems with an uncertain parameter[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2005, 6: 201-206
[9] Botmart T, Niamsup P. Adaptive control and synchronization of the perturbed Chua's system[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2007, 75: 37-55
[10] Rulkov N F, *et al*. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems[J]. Physical Review E, 1995, 51: 980-994
[11] Wang Y W, Guan Z H. Generalized synchronization of continuous chaotic systems[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2006, 27: 97-101
[12] Li G H. Generalized projective synchronization between Lorenz system and Chen's system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2007, 32: 1454-1458
[13] Li G H. Modified projective synchronization of chaotic system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2007, 32: 1786-1790
[14] Chen Y, An H L, Li Z B. The function cascade synchronization approach with uncertain parameters or not for hyperchaotic systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197: 96-110
[15] Luo R Z. Adaptive function project synchronization of Rössler hyperchaotic system with uncertain parameters[J]. Physics Letters A, 2008, 372: 3667-3671
[16] Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9: 1465-1466
[17] 刘永清，宋中昆. 大型动力系统的理论与应用-分解、稳定与结构[M]. 广州：华南工学院出版社，1988
Liu Y Q, Song Z K. Theory and Application of Large-scale Dynamic Systems: Decomposition Stability and Structure[M]. Guangzhou: South China Institute of Technology Press, 1988

The Function Projective Synchronization of Rössler Chaotic System

LUO Run-zi, DENG Shu-cheng, WEI Zheng-min

(Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang 330031)

Abstract: Chaos synchronization is an important topic in the nonlinear science. At present most of the developed synchronization methods are valid only for chaotic systems whose parameters are precisely known, but in practical situation, some system's parameters cannot be exactly known in priori, therefore, synchronization of chaotic systems in the presence of unknown parameters is essential. This paper discusses the function projective synchronization problem of Rössler chaotic system in the presence of known or unknown system parameters. Based on the stability theory of linear system and the Lyapunov stability theory, three sufficient conditions are proposed to make the states of two chaotic systems asymptotically synchronized. Numerical simulations are presented to show the effectiveness of the proposed schemes.

Keywords: function projective synchronization; Lyapunov method; Rössler chaotic system

Received: 31 Dec 2008. **Accepted:** 25 May 2009.

Foundation item: The Natural Science Foundation of Jiangxi Province (2007GZS2126).